Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение средняя общеобразовательная школа № 12 им А.С. Пушкина

СБОРНИК ДИДАКТИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ

Подготовка к ОГЭ. Решаем задание 22.

Подготовила: Боталова Ольга Викторовна,

учитель математики

МБОУ СОШ № 12 им. А.С. Пушкина

ст Кавказская 2023

Введение

Введение.

Тема «Функции» в курсе алгебры 7-9 классов считается наиболее трудной для усвоения учащимися. В ОГЭ по математике эта тема представлена двумя заданиями: задание № 11 (1 часть работы) и задание № 22(2 часть экзаменационной работы).

В **задании 11** выпускникам предлагается продемонстрировать умения устанавливать соответствие между функциями и их графиками.

Задание 22 – это задание высокого уровня сложности, оно требует свободного владения материалом и довольно высокого уровня математического развития. Рассчитаны эти задачи на обучающихся, изучавших математику более основательно, например, в рамках углубленного курса математики, элективных курсов в ходе предпрофильной подготовки, математических кружков и пр. Хотя эти задания не выходят за рамки содержания, предусмотренного стандартом основной школы, но при их выполнении ученик должен продемонстрировать владение некоторыми специальными приемами преобразования выражений, проявить умения исследовательского характера.

Задание 22 представляет собой задачу по теме «Графики функций». Это задание можно отнести к достаточно сложным, но следует понимать, что сложность эта относительна и в данном случае обусловлена либо формулой, задающей функцию и предполагающей предварительные алгебраические преобразования для получения одной из базовых функций школьного курса (из области определения которой в некоторых случаях придётся исключить одну или две точки), либо самим условием, требующим исследования взаимного расположения графиков двух функций и ответа на определённые вопросы о числе их общих точек в зависимости от некоторой величины. Что касается формулы, задающей функцию, то, как уже отмечалось, после несложных преобразований этой формулы (сокращения дроби, раскрытия модуля, приведения подобных слагаемых) получается формула, задающая элементарную функцию, графиком которой (или частью графика) является прямая, парабола, гипербола или их части, возможно, с удаленными (выколотыми) точками (последние могут появиться в случае задания функции с помощью алгебраической дроби, область определения которой находится из условия неравенства нулю их знаменателя).

В заданиях 22 рассматривается графический способ решения уравнений, имеющих один из двух видов: 1) $f(x) = m$; 2) $f(x) = kx$, где f(x) – произвольная функция, f и m – произвольные числа.

Уравнение $y=m$ ($m \in R$) задаёт множество всех прямых параллельных оси абсцисс.

Уравнение $y=kx$ ($k \in R$) задаёт множество всех прямых, проходящих через начало координат, кроме оси ординат. Как правило, требуется: - либо найти все такие значения m или k, при которых

а) прямые $y=m$ или $y=kx$ не имеют общих точек с графиком функции $y=f(x)$;

б) прямые $y=m$ или $y=kx$ имеют с графиком функции $y=f(x)$ заданное число общих точек. - либо найти наибольшее возможное число общих точек у прямых $y=m$ или $y=kx$ с графиком функции $y=f(x)$

Алгоритм решения задания 22.

Алгоритм работы с заданием:

- преобразуем формулу, которая задаёт функцию, и найдём область определения функции;

- определим вид и характерные точки графика функции на каждом промежутке;

- изобразим график функции на координатной плоскости (учитывая точки разрыва функции);

- исследуем график функции, исходя из вопроса к заданию (проведём прямые y=m или y=kx, согласно условию задачи);

- запишем ответ.

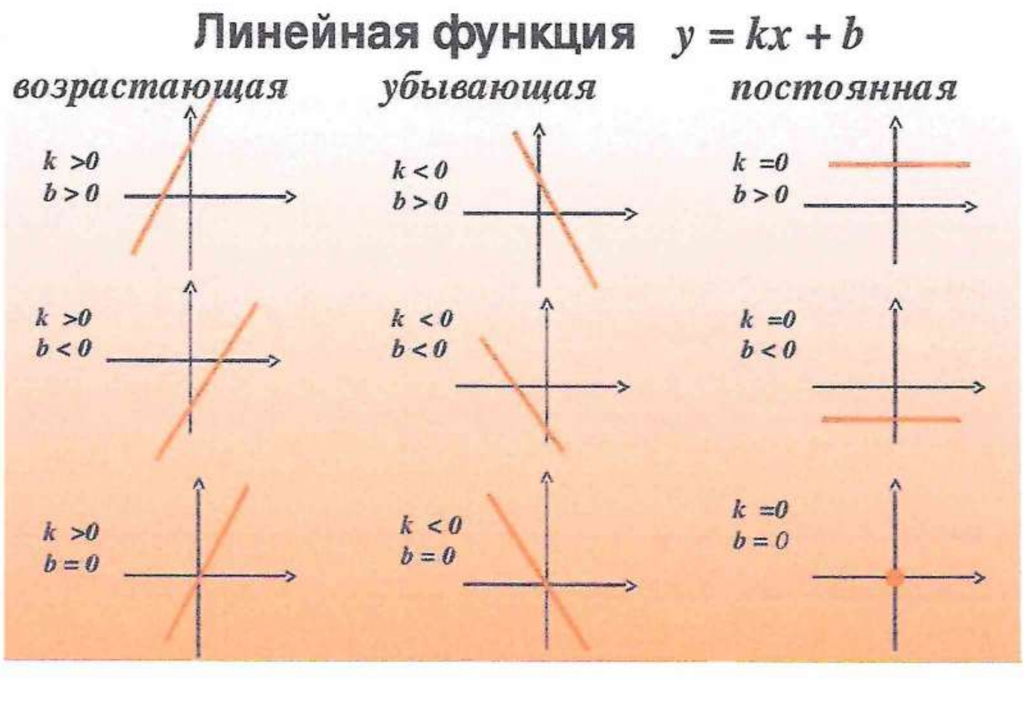
Для подготовки учащихся нужно повторить?

Функция $y = kx + b$,где k и b – некоторые действительные числа, а x – переменная, называется линейной.

Область определения линейной функции – $\mathbb{R}$, область значений при $k = 0$ состоит из одного числа b, при $k \neq 0$ – $\mathbb{R}$.

Графиком линейной функции является прямая, для её построения достаточно двух точек.

При y=0 $x = -\ b\ k$ – точка пересечения с осью OX. При x=0 y=b – точка пересечения с осью OY.



Функция $y = |x|$

1. $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

2. $|x| \geq 0 \Rightarrow E(y) = [0; +\infty)$.

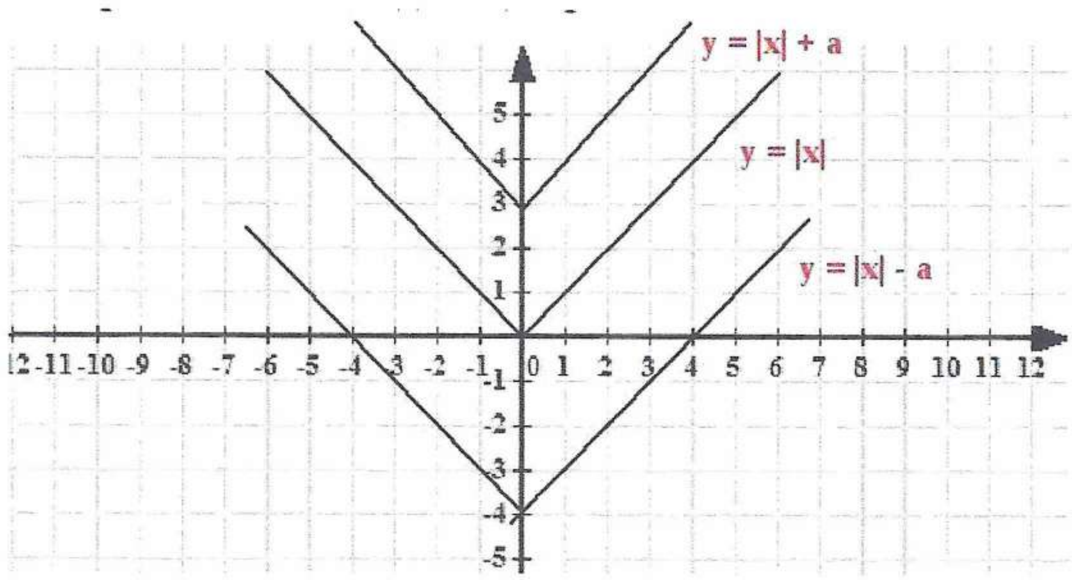
3. Нули функции: $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0 \Leftrightarrow x = 0$

4. Если $x \neq 0$, то $y > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

5. Функция возрастает при $x \in [0; +\infty)$. Функция убывает

при $x \in (-\infty; 0]$.

6. $y = |x| \Leftrightarrow \{ y = x, x \geq 0; y = -x, x < 0$. 7. $y(-x) = |-x| = |x| = y(x)$– функция четна.



Функция y = ax ^{2} + bx + c – квадратичная функция, где $\boldsymbol{a}$ ($a \neq 0$), $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ – действительные числа и $\boldsymbol{x}$ – переменная, называется квадратичной.

1. $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

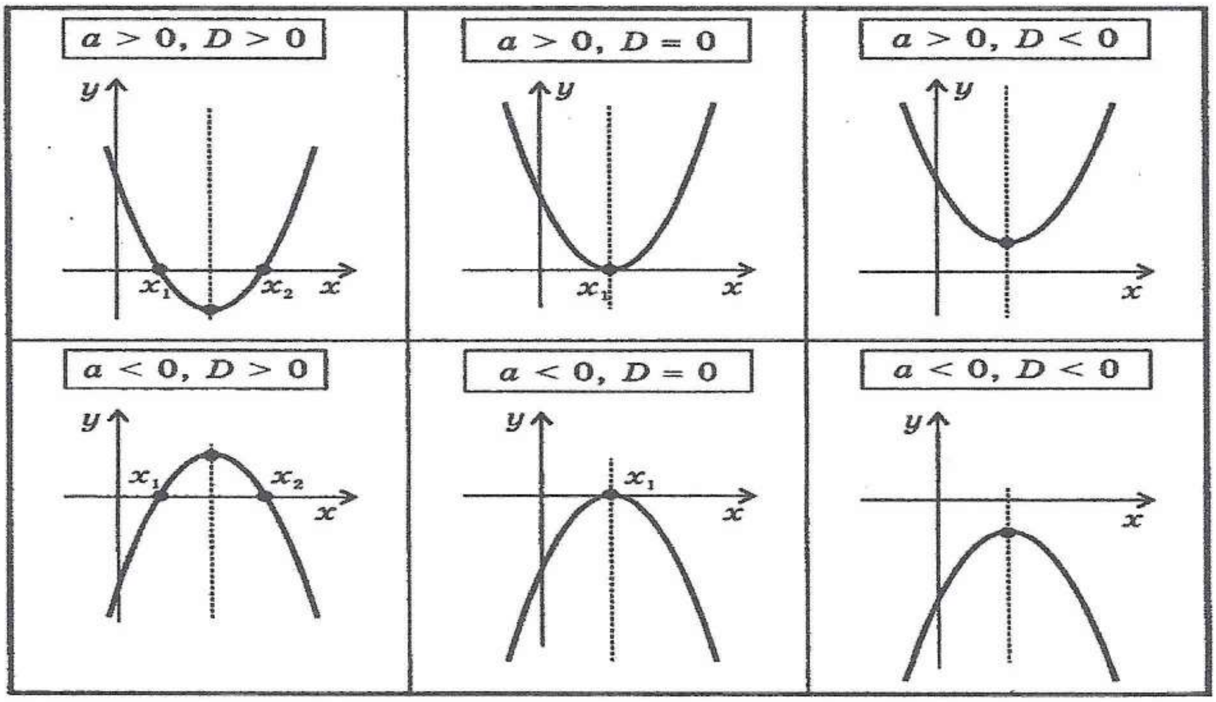
2. Графиком квадратичной функции является парабола, ветви которой при $\boldsymbol{a} > \mathbf{0}$ направлены вверх, а при $\boldsymbol{a} < \mathbf{0}$ – вниз.

Вершина параболы: $m = -b\ /2a$, n – считаем, $n = y(m)$.

Точки пересечения:

с осью Ox: y=0, то $ax^2 + bx + c = 0$

с осью Oy: x=0, то y=c.



Функция, описывающая обратную пропорциональную зависимость, её график $y = k\,/x$, x – переменная, $k \neq 0$ – число

1. $D(y) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$.

2. $E(y) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$

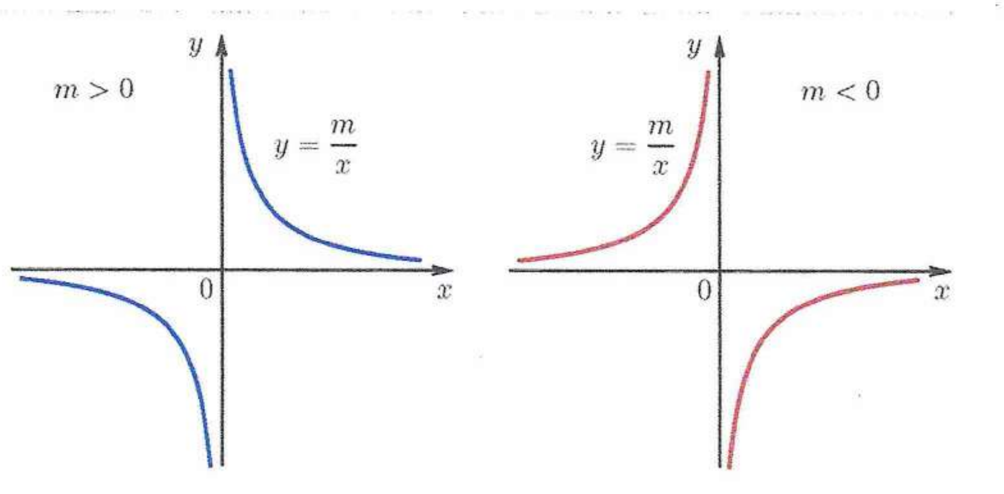
3. У функции $y = k\ x$ нет нулей.

4. Если $k > 0$, то $y > 0 \Leftrightarrow x \in (0;\ +\infty)$; $y < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;\ 0)$. Если $k < 0$, то $y > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;\ 0)$; $y < 0 \Leftrightarrow x \in (0;\ +\infty)$.

5. Если $k > 0$, то $y = k\ x$ убывает на $D(y)$. Если $k < 0$, то $y = k\ x$ возрастает на $D(y)$.

6. График функции – гипербола

7. $y(-x) = k\ -x = -\ k\ x = -y(x)$– функция нечетная.



Функция $y = \sqrt{x}$

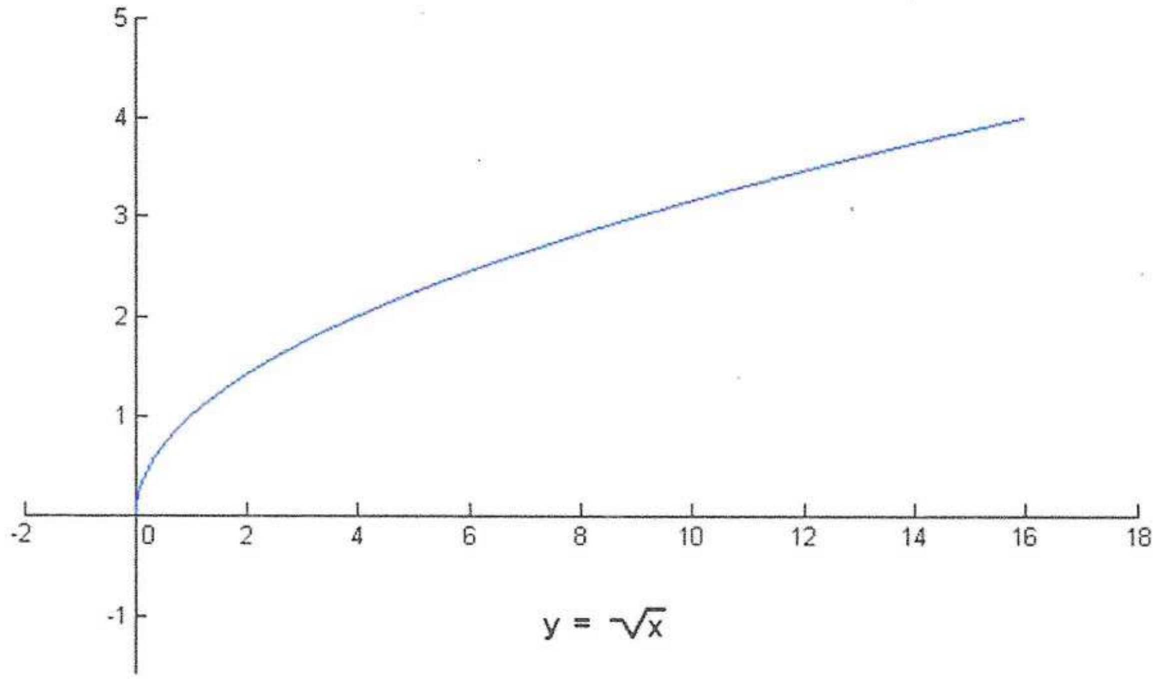
1. $D(y) = [0; +\infty)$

2. $E(y) = [0; +\infty)$.

3. Нули функции: $y = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

4. Если $x \neq 0$, то $y > 0 \Leftrightarrow x \in D(y)$.

5. Функция возрастает на $D(y)$.



Решая задание 22.

Все задания 22 можно разделить на три группы:

1. Функции, при преобразовании которых необходимо раскрыть знак модуля.
2. Кусочные графики.
3. Дробно- рациональные функции.

Рассмотрим каждый из этих типажей.

1. **Функции, при преобразовании которых необходимо раскрыть знак модуля.**

Задание. Постройте график функции y = x2+ 3x− 3|x +2|+ 2 и определите, при каких значениях m прямая y = m имеет с графиком ровно три общие точки.

Раскроем модуль:

$$y = \begin{cases} x^2 + 3x - 3(x+2) + 2, \text{ если } x + 2 \geqslant 0 \\ x^2 + 3x + 3(x+2) + 2, \text{ если } x + 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \begin{cases} x^2 + 3x - 3x - 6 + 2, \text{ если } x \geqslant -2 \\ x^2 + 3x + 3x + 6 + 2, \text{ если } x < -2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \begin{cases} x^2 - 4, \text{ если } x \geqslant -2 \\ x^2 + 6x + 8, \text{ если } x < -2 \end{cases}$$

График функции при $x \geqslant -2$ — это парабола $y = x^2 - 4$.
Найдем вершину параболы:

$$x_{\text{в.}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2} = 0$$

$$y_{\text{в.}} = 0^2 - 4 = -4$$

Построим таблицу значений для параболы при $x \geqslant -2$:

x	-2	-1	0	1	2	3
y	0	-3	-4	-3	0	5

График функции при $x < -2$ — это парабола $y = x^2 + 6x + 8$.
Найдем вершину параболы:

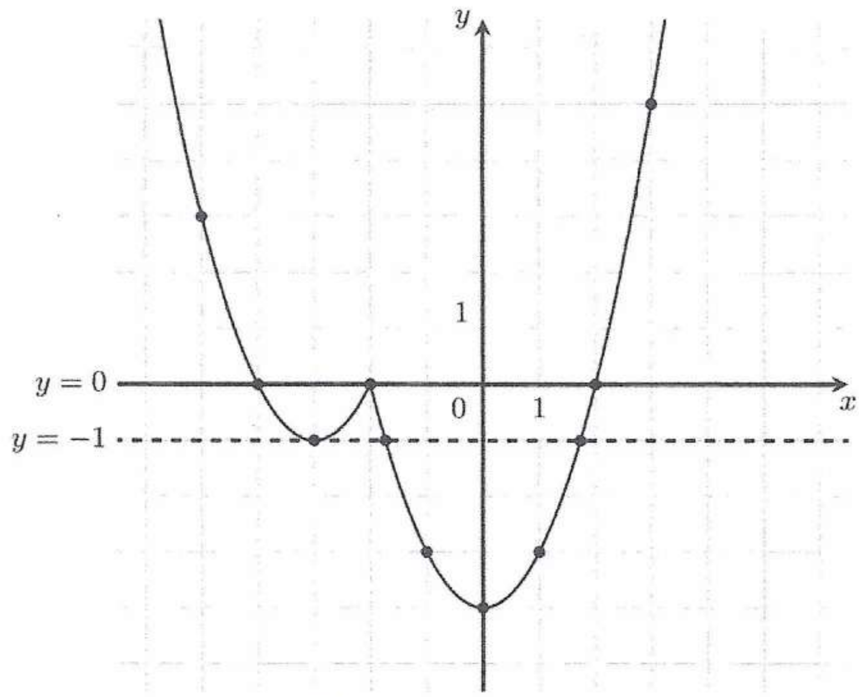
$$x_{\text{в.}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2} = -3$$

$$y_{\text{в.}} = (-3)^2 + 6 \cdot (-3) + 8 = -1$$

Построим таблицу значений для параболы при $x < -2$:

x	-5	-4	-3	-2
y	3	0	-1	0

Построим график функции:



$y = m$ — множество горизонтальных прямых. Прямая $y = m$ имеет три точки пересечения с графиком в двух случаях:

1. Прямая $y = m$ проходит через вершину параболы $y = x^2 + 6x + 8$, то есть через точку $(-3; -1)$. В этом случае $m = -1$.
2. Прямая $y = m$ проходит через точку стыка двух парабол, то есть через точку $(-2; 0)$. В этом случае $m = 0$.

Таким образом,

$$m \in \{0; -1\}$$

Ответ:
$m \in \{0; -1\}$

Задания для самостоятельного решения:

1.

Постройте график функции $y = \dfrac{2|x| - 1}{|x| - 2x^2}$.
Определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ не имеет с графиком общих точек.

2.

Постройте график функции $y = \dfrac{2|x| - 1}{|x| - 2x^2}$.
Определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ не имеет с графиком общих точек.

3.

Постройте график функции $y = \left|\frac{2}{3-x} + 1\right|$.
Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

4.

Постройте график функции $y = |x^2 + 8x + 12|$.
Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

5.

Постройте график функции $y = -x^2 + 6|x| - 5$.
Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

2. **Кусочные графики**.

Задание.

График функции при $x \geqslant -3$ — это парабола $y = -x^2 - 2x + 1$.
Найдем вершину параболы:

$$x_{\text{в.}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{-2} = -1$$

$$y_{\text{в.}} = -(-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 1 = 2$$

Построим таблицу значений для параболы при $x \geqslant -3$:

x	-1	-2	-3	0	1	2
y	2	1	-2	1	-2	-7

График функции при $x < -3$ — это прямая $y = -x - 5$.
Построим таблицу значений для прямой при $x < -3$:

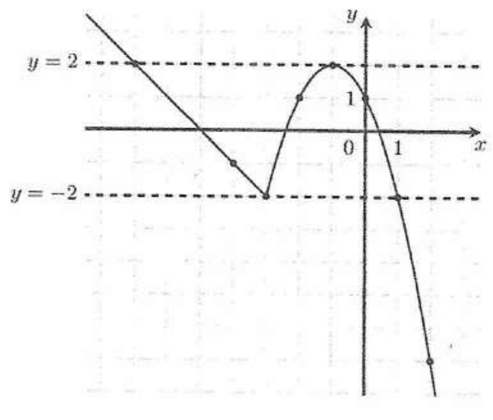
x	-3	-4
y	-2	-1

Постройте график функции

$$y = \begin{cases} -x^2 - 2x + 1, \text{если } x \geqslant -3, \\ -x - 5, \text{ если } x < -3, \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Построим график функции:



$y = m$ — множество горизонтальных прямых. Прямая $y = m$ имеет 2 общие точки с графиком в двух случаях

1. Прямая $y = m$ проходит через стык прямой и параболы — точку $(-3; -2)$. В этом случае $m = -2$.
2. Прямая $y = m$ проходит через вершину параболы — точку $(-1; 2)$. В этом случае $m = 2$.

Таким образом, прямая $y = m$ имеет 2 точки пересечения с графиком, если $m \in \{-2; 2\}$.

Ответ:
$m \in \{-2; 2\}$

Задания для самостоятельного решения:

1.

Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2 - 8x + 14 & \text{при } x \geqslant 3, \\ x - 2 & \text{при } x < 3. \end{cases}$$

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

2.

Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x - 2,5 & \text{при } x < 2, \\ -x + 1,5 & \text{при } 2 \leqslant x \leqslant 3, \\ x - 5 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

3.

Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2 + 2x + 1, & \text{если } x \geqslant -2, \\ x + 3, & \text{если } x < -2, \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

4.

Постройте график функции $y = \begin{cases} x^2 - 6x + 6 & \text{при } x \geqslant 2 \\ x - 3 & \text{при } x < 2. \end{cases}$

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

5.

Постройте график функции

$$y = \begin{cases} 2x - 2, & \text{если } x < 3 \\ -3x + 13, & \text{если } 3 \leqslant x \leqslant 4 \\ 1,5x - 5, & \text{если } x > 4 \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

3.Дробно- рациональные функции

Задание.

Постройте график функции $y = \dfrac{(x+3)(x^2-3x+2)}{x-2}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Область определения функции:

$$x - 2 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 2$$

Разложим $x^2 - 3x + 2$ на множители:

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$D = 9 - 4 \cdot 2 = 1 = 1^2$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = 1$$

Значит, $x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$.

Тогда

$$y = \frac{(x+3)(x^2-3x+2)}{x-2} = \frac{(x+3)(x-2)(x-1)}{x-2} = (x+3)(x-1) = x^2 + 2x - 3$$

Найдём координату выколотой точки:

$$x = 2 \quad \Rightarrow \quad y = 2^2 + 2 \cdot 2 - 3 = 5$$

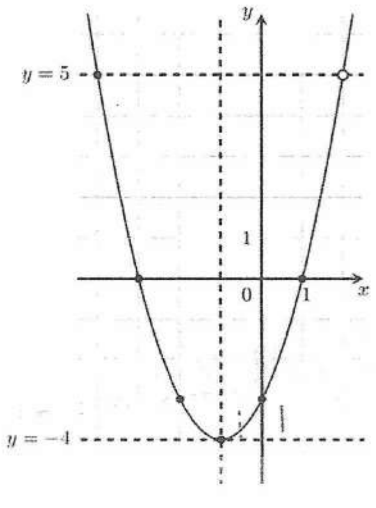
График функции $y = \dfrac{(x+3)(x^2-3x+2)}{x-2}$ — это парабола $y = x^2 + 2x - 3$ с выколотой точкой $(2;5)$.

Выделим полный квадрат:

$$x^2 + 2x - 3 = x^2 + 2x + 1 - 1 - 3 = x^2 + 2x + 1 - 4 = (x+1)^2 - 4$$

Для того, чтобы построить график функции $y = (x+1)^2 - 4$, нужно график функции $y = x^2$ сдвинуть на 1 единицу влево и 4 единицы вниз, то есть построить в новых вспомогательных осях $Ox : x = -1$ и $Oy : y = -4$.

Построим график функции:



$y = m$ — множество горизонтальных прямых. Прямая $y = m$ имеет с графиком одну точку пересечения в двух случаях:

1. Прямая $y = m$ проходит через вершину параболы $(-1; -4)$. В этом случае $m = -4$.
2. Прямая $y = m$ проходит через выколотую точку $(2; 5)$. В этом случае $m = 5$.

Таким образом,

$$m \in \{-4; 5\}$$

Ответ:
$-4;\ 5$

Задания для самостоятельного решения:

1.

Постройте график функции $y = \dfrac{(x^2 + x - 6)\,(x^2 - 2x - 3)}{x^2 - 9}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

2.

Постройте график функции $y = \dfrac{(x^2 - 4)(x^2 - 4x + 3)}{x^2 - 3x + 2}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Заключение.

Опыт показывает, что учащиеся, разобравшись в данном материале, с интересом решают задание 22, анализируют задания и строят графики функции. Материал для подготовки и отработки данного задания можно найти в открытом банке заданий ОГЭ на ФИПИ, в СтатГраде, на сайте РЕШУ ОГЭ.

Предлагаемый материал, поможет учителю математики, учащему 9 класса системно разобраться в типажах задания 22 ОГЭ, систематизировать знания при подготовке к экзамену.

Литература.

1. Под. ред. Ященко И.В.Математика ОГЭ. Типовые тестовые задания , 2021,2022,2023г.
2. Материалы образовательного портала **math100.ru.**
3. Материалы образовательного портала **oge.sdamgia.ru**
4. Материалы образовательного портала **мояматематика.рф**